Twierdzenie Brouwera (praca domowa)

Zasady rozwiązywania. Poniższe sześć zadań należy samodzielnie rozwiązać, a następnie oddać na piśmie. Dopuszczalna jest forma papierowa (czytelnym pismem) i elektroniczna (dokument zredagowany w TeXu lub skan czytelny po wydrukowaniu). Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do piątku 24 stycznia** (do północy, jeśli chodzi o wersję elektroniczną). W uzgodnionych przypadkach później.

Oznaczenia.

$$\mathbf{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\} \text{ – domknięta kula jednostkowa}$$
$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \text{ – sfera jednostkowa}$$

Twierdzenie Brouwera o retrakcji. (wersja dla funkcji gładkich) Nie istnieje gładka retrakcja $u\colon \mathbf{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, czyli funkcja spełniająca $u(x) = x$ dla $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Zadanie 1. Dla n wektorów $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ wprowadźmy oznaczenie na wyznacznik macierzy mającej je w kolejnych kolumnach:

$$A_{v_1,v_2,\ldots,v_n}(t) := \det(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Dla funkcji gładkich $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ wyprowadzić wzór

$$\frac{d}{dt} A_{f_1,f_2,\ldots,f_n} = A_{f_1',f_2,\ldots,f_n} + A_{f_1,f_2',\ldots,f_n} + \ldots + A_{f_1,f_2,\ldots,f_n'}.$$

Zadanie 2. Niech $H\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją gładką. Zdefiniujmy

$$D_k := A_{\partial_{x_0} H,\ldots,\widehat{\partial_{x_k} H},\ldots,\partial_{x_n} H} \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n,$$

gdzie przez $\widehat{\cdot}$ rozumiemy pominięcie danego wyrazu. Wykazać tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\partial D_k}{\partial x_k} = 0.$$

Strategia dowodu. Przypuśćmy, że $u\colon \mathbf{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ jest gładką retrakcją. Wprowadźmy pomocniczo homotopię między u a funkcją identycznościową:

$$H\colon \mathbb{R} \times \mathbf{B}^n \to \mathbb{R}^n, \quad H(t,x) = (1-t)x + tu(x),$$

dla każdego t oznaczmy też funkcję jednej zmiennej $H_t(x) := H(t,x)$. Zdefiniujmy

$$V(t) := \int_{\mathbf{B}^n} \det Dh_t(x)\, \mathrm{d}x.$$

Następne zadania wykażą sprzeczne własności V, co dopełni dowód twierdzenia Brouwera.

Zadanie 3. Przyjmując t za dodatkową współrzędną x_0, wprowadźmy D_k jak poprzednio. Wykazać, że

$$\int_{\mathbf{B}^n} \frac{\partial D_k}{\partial x_k}(t,x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{dla } k = 1, \dots, n.$$

Wskazówka. Korzystając z twierdzenia Fubiniego, ustalić zmienne $x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n$ i scałkować po x_k.

Zadanie 4. Wykazać, że $V'(t) = 0$ dla $t \in (0,1)$.
Wskazówka. Wyznacznik $\det Dh_t$ to nic innego jak D_0.

Zadanie 5. Sprawdzić, że $V(0) = |\mathbf{B}^n|$.

Zadanie 6. Sprawdzić, że $V(1) = 0$.
Wskazówka. Z faktu zawierania $u(\mathbf{B}^n) \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ wywnioskować, że różniczka $du(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest zdegenerowana dla każdego $x \in \mathbf{B}^n$.